数理解析研究所講究録
第 1926 巻 2014 年 106-113

Principal subspaces and intermediate Lie algebras

東京大学大学院数理科学研究科・川節和哉
Kazuya Kawasetsu
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo
E-mail adress: kawasetu@ms.u-tokyo.ac.jp

本稿では, Delinge の例外系列に属する中間リー環, $E_{7+1/2}$ に付随する頂点代数の, 指標のモジュラー不変性について考察する.

1 Deligne の公式と, Mathur-Mukhi-Sen 分類

Deligne の例外系列とは, 単純リー環 $\mathfrak{g}$ の列

$$\begin{array}{rcccccccccccccccl} & A_1 & \subset & A_2 & \subset & G_2 & \subset & D_4 & \subset & F_4 & \subset & E_6 & \subset & E_7 & \subset & E_8 & \\ (h^\vee: & 2 & & 3 & & 4 & & 6 & & 9 & & 12 & & 18 & & 30 &) \\ (\dim\mathfrak{g}: & 3 & & 8 & & 14 & & 28 & & 52 & & 78 & & 133 & & 248 &) \end{array}$$

である [D]. 双対 Coxeter 数 $h^\vee$ と, 次元 $\dim\mathfrak{g}$ も表示してある. これらのリー環の随伴表現のいくつかのテンソル積の既約成分について, 注目すべき次元公式が確立されている. それらは, Deligne の次元公式と呼ばれ, 双対 Coxeter 数 $h^\vee$ の有理式の形を持つ [D, LM2]. 例えば,

$$\dim\mathfrak{g}=\frac{2(h^\vee+1)(5h^\vee-6)}{h^\vee+6},$$

$$\dim L(2\tilde{\alpha})=\frac{5(h^\vee)^2(2h^\vee+3)(5h^\vee-6)}{(h^\vee+12)(h^\vee+6)}.$$

ここで, $\mathfrak{g}$ は Deligne の例外系列に属するリー環, $L(2\tilde{\alpha})$ は, $2\tilde{\alpha}$ を最高ウェイトとする既約加群である. ここで, $\tilde{\alpha}$ は最高ルート. 例えば, $h^\vee=2$ を代入すると, $\dim\mathfrak{g}=3$ となり, これは $\mathfrak{g}=A_1$ の次元である. また, $h^\vee=18$ を代入すると, $\dim\mathfrak{g}=133$ となり, これは $\mathfrak{g}=E_7$ の次元であり, $h^\vee=30$ を代入すると, $\dim\mathfrak{g}=248$ となり, これは $\mathfrak{g}=E_8$ の次元である.

ここで, 列中にない値 $h^\vee=24$ を形式的に代入してみよう. すると, $\dim\mathfrak{g}=190$, $\dim L(2\tilde{\alpha})=15504$ となり, これは正整数値である. ところが, そのような単純リー環は存在しない. では, そのような次元を持つ単純でないリー環は存在していないだろうか.

実は, Landsberg と Manivel によって, 中間リー環 $\mathfrak{g}=E_{7+1/2}=\mathrm{Comm}_{E_8}(e^{\tilde{\alpha}})$ [LM1] という答えが与えられた. ここで, $e^{\tilde{\alpha}}$ は最高ルートに対応するルートベクトルであり,

μ	$\dim V_1$	c	h	$\mathfrak{g}$
11/900	1	2/5	1/5	
5/144	3	1	1/4	A_1
1/12	8	2	1/3	A_2
119/900	14	14/5	2/5	G_2
2/9	28	4	1/2	D_4
299/900	52	26/5	3/5	F_4
5/12	78	6	2/3	E_6
77/144	133	7	3/4	E_7
551/900	190	38/5	4/5	
2/3	248	8	(5/6)	E_8

表 1: "2 つ"の既約指標と, $h \geq 0$ を持つ, 有理共形場理論

$\mathrm{Comm}_{E_8}(e^{\tilde{\alpha}})$ は, E_8 の中で, それと交換する部分リー環を表す. これは, 非簡約リー環であり, $E_7 \subset E_{7+1/2} \subset E_8$ という包含関係を持つ. 単純リー環でないので, 双対 Coxeter 数というのは本来意味を持たないが, $h^\vee = 24$ であると見なすことで, 上の公式を得るのである.

ところで, このような系列は, モジュラー不変な微分方程式の研究にも現れている. モジュラー不変な微分方程式 (モジュラー微分方程式)

$$f''(\tau) + 2E_2(\tau)f'(\tau) - 180\mu \cdot E_4(\tau)f(\tau) = 0 \tag{1}$$

を考える [KNS, KZ, MMS]. ここで, τ は複素上半平面の点, $E_k(\tau)$ は Eisenstein 級数, μ は定数 (パラメーター) である. Mathur, Mukhi と Sen は, この方程式を, 有理共形場理論の分類問題に用いた (Mathur-Mukhi-Sen 分類, MMS 分類). 2 つの既約指標を持つ有理共形場理論を考える. すると, その指標は, ある μ に対して, この微分方程式を満たす. そこで, q 展開したときに係数が正整数となるような基底を持つ μ を求めれば, 2 つの既約指標を持つ有理共形場理論の指標を分類できる.

表 1 に分類結果を示した. 右側が対応する有理共形場理論 (Wess-Zumino-Witten 模型) のタイプである. 有限次元単純リー環 $\mathfrak{g}$ をタイプに持つ WZW 模型は, $\mathfrak{g}$ に付随するレベル 1 アファイン頂点作用素代数 $V = L_{1,0}(\mathfrak{g})$ によって記述される理論である. $V = L_{1,0}(\mathfrak{g})$ は, アファインリー環 $\hat{\mathfrak{g}}$ の基本表現に頂点作用素代数の構造を入れたものである. V は $\mathbb{Z}_+$ 次数つきベクトル空間であり, その 1 次斉次部分空間 V_1 は, $\mathfrak{g}$ と同型なリー環の構造を持つ. 表 1 において, c は対応する中心電荷を表す. なお, V の指標とは, 次数付きベクトル空間 V とその表現の次数付き次元だと思える. 次数付き次元は, 各斉次空間の次元をまとめた母関数のようなものである. 表 1 に現れた $\mathfrak{g}$ は, Deligne の例外系列と一致することに注意する.

$\mu = 551/900$ のとき, 微分方程式 (1) は, 次の形の解空間の基底を持つ:

$$f_1(\tau) = q^{-c/24}(1 + 190q + \cdots),$$

$$f_2(\tau) = q^{h-c/24}(57 + \cdots).$$

ここで, $c = 38/5$, $h = 4/5$, $q = e^{2\pi i\tau}$ である. ここに書かれた係数は, 正整数である. 特に, $f_1(\tau)$ の二番目の係数 190 が中間リー環 $\mathfrak{g} = E_{7+1/2}$ の次元 190 に等しいことに注意する. ところが, Verlinde 公式より, そのような指標を持つ有理共形場理論 V は存在しない.

以上を踏まえて, 次の頂点代数

$$V = \langle E_{7+1/2} \rangle_{\text{v.a.}} \subset L_{1,0}(E_8)$$

を考える（中間頂点代数）. ここで, $\langle A \rangle_{\text{v.a.}}$ は, A で生成される頂点部分代数, つまり, A を含む最小の頂点部分代数を表す. $E_{7+1/2}$ は単純でないので, V に菅原構成法でヴィラソロ代数の作用を与えられないことに注意. つまり, V には自然に頂点作用素代数の構造が入らない. よって, 自然に有理共形場理論でもない. 実際, V は次数付きベクトル空間 $L_{1,0}(E_8)$ の次数付き部分ベクトル空間であるが, その次数と compatible な頂点作用素代数の構造は存在しない. 特に, 頂点作用素代数でないので, 中心電荷 c の概念が定義されない.

我々の主結果は, V の中心電荷が $c = 38/5$ であると見なすと, V と, V のある表現の指標, すなわち次数付き次元が, モジュラー微分方程式 (1) の解空間の基底となることである. これは, $h^\vee = 24$ とみなすと, $E_{7+1/2}$ が Deligne の公式を満たすことに対応している ([T, Mat]). 以下, V を $L_{1,0}(E_{7+1/2})$ と書く.

研究集会での講演を薦めてくださった山内博氏と、本稿の執筆にあたり有益なコメントをくださった指導教官の松尾厚先生に感謝する.

2 中間頂点代数 $L_{1,0}(E_{7+1/2})$ とその指標

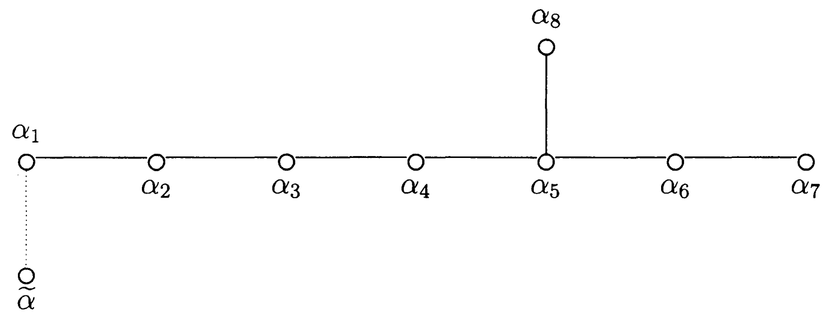

図 1: E_8 の Dynkin 図

E_8 を E_8 型ルート格子とし, $(\cdot|\cdot) : E_8 \times E_8 \to \mathbb{Z}$ をその内積とする. $\alpha_1, \ldots, \alpha_8$ を単純ルートとする（図 1 参照）. また, $\tilde{\alpha}$ を最高ルートとする. $\alpha_2, \ldots, \alpha_8$ は E_7 型ルート格子を張り, $\tilde{\alpha}$ の張る A_1 型ルート格子と直交することに注意.

simply-laced な有限次元単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に付随するレベル 1 アファイン頂点作用素代数 $L_{1,0}(\mathfrak{g})$ は, $\mathfrak{g}$ のルート格子 Q に付随する格子頂点作用素代数 V_Q と同型である. そこで, 以下, $L_{1,0}(E_8)$ の代わりに, 格子頂点作用素代数 V_{E_8} を考える.

前章の $L_{1,0}(E_{7+1/2})$ は, 実は, 格子頂点作用素代数の中間頂点部分代数 [Kaw]

$$W = \langle e^{\alpha_1}, e^{\pm\alpha_2}, \ldots, e^{\pm\alpha_8} \rangle_{\text{v.a}} \subset V_{E_8}$$

と同型である. W が, $\langle e^{\alpha_1} \rangle_{\text{v.a.}}$ と, V_{E_7} を含むことに注意. $A_1 = \mathbb{Z}\alpha_1$ とおくと, $\langle e^{\alpha_1} \rangle_{\text{v.a.}}$ は, 格子頂点作用素代数 V_{A_1} の主部分空間 [SF, P, MilP] と呼ばれるものである. 我々は主部分空間の表現論を使う. $\langle e^{\alpha_1} \rangle_{\text{v.a.}}$ と V_{E_7} が可換であれば話は簡単だが, そうではない. [Kaw] で, $\langle e^{\alpha_1} \rangle_{\text{v.a.}}$-加群としての W の分解を記述し, 基底と指標を与えた.

$M = W \cdot e^{\alpha_1} \subset V_{E_8}$ (cyclic W-加群) を考える. $c = 38/5$, $h = 4/5$ と置く.

定義 2.1. W の指標とは,

$$Z(W,\tau) := \mathrm{tr}_W q^{L_0 - c/24} = q^{-c/24} \sum_{n=0}^{\infty} \dim W_n q^n,$$

$$Z(M,\tau) := \mathrm{tr}_M q^{L_0 - 1 + h - c/24} = q^{-c/24+h} \sum_{n=0}^{\infty} \dim M_{n+1} q^n.$$

ここで, L_0 は, V_{E_8} のハミルトニアン L_0 を制限したものである.

主部分空間の加群としての W の分解より, 次の公式を得る.

命題 2.1.

$$Z(W,\tau) = \sum_{k_1 \geq 0, k_2, \ldots, k_8 \in \mathbb{Z}} \frac{q^{\frac{\mathbf{k}E_8\mathbf{k}^{\mathrm{T}}}{2}}}{(q)_{k_1}} \cdot \frac{q^{-c/24}}{((q)_\infty)^7},$$

$$Z(M,\tau) = \sum_{k_1 \geq 1, k_2, \ldots, k_8 \in \mathbb{Z}} \frac{q^{\frac{\mathbf{k}E_8\mathbf{k}^{\mathrm{T}}}{2} - 1}}{(q)_{k_1 - 1}} \cdot \frac{q^{h-c/24}}{((q)_\infty)^7}.$$

ここで, E_8 は E_8 型の Cartan 行列, $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_8)$.

$(q)_k$ は, q-Pochhammer 記号 $(q)_k = (q;q)_k = (1-q)\cdots(1-q^k)$ である. $1/(q)_k$ は, 多くても長さが k の, 自然数の分割の母関数であることに注意 [A].

次が主定理である.

定理 2.1. 指標 $Z(W,\tau)$ と $Z(M,\tau)$ は, モジュラー微分方程式 (1) ($\mu = 551/900$) の解空間の基底をなす.

証明の概略. "V_{E_7} と直交する頂点部分代数"を考えることで, 指標 $Z(W,\tau)$ を分解する. ルート α_1 は, $\alpha_1 = \tilde{\alpha}/2 + \mu$ ($\mu \in E_7^\circ, \notin E_7$) という形を持つ. $k_1 \geq 0$, $k_2, \ldots, k_8 \in \mathbb{Z}$ とする.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{k}E_8\mathbf{k}^{\mathrm{T}}}{2} &= \frac{(k_1\alpha_1 + \cdots + k_8\alpha_8 | k_1\alpha_1 + \cdots + k_8\alpha_8)}{2} \\
&= \frac{((k_1/2)\tilde{\alpha} + k_1\mu + k_2\alpha_2 + \cdots + k_8\alpha_8 | (k_1/2)\tilde{\alpha} + k_1\mu + k_2\alpha_2 + \cdots + k_8\alpha_8)}{2} \\
&= \frac{k_1^2}{4} + \frac{(k_1\mu + k_2\alpha_2 + \cdots + k_8\alpha_8 | k_1\mu + k_2\alpha_2 + \cdots + k_8\alpha_8)}{2}.
\end{aligned}$$

$\mu \notin E_7$ であり, $2\mu \in E_7$ であるので, k_1 が偶数か奇数かによって, 第二項の様子が大きく変わることに注意. この式を $Z(W,\tau)$ の公式に代入して,

$$
\begin{aligned}
&Z(W,\tau)\\
&= q^{-c/24}\left(\sum_{k_1\geq 0,\text{even}} \frac{q^{k^2/4}}{(q)_k}\cdot q^{7/24}\cdot Z(V_{E_7},\tau) + \sum_{k_1\geq 1,\text{odd}} \frac{q^{k^2/4}}{(q)_k}\cdot q^{-3/4+7/24}\cdot Z(V_{E_7+\mu},\tau)\right).
\end{aligned}
$$

ここで, $Z(V_{E_7},\tau)$ と $Z(V_{E_7+\mu},\tau)$ は, 格子頂点作用素代数 V_{E_7} の二つの既約表現の指標である. Fermionic 和公式 [KKMM] より, 各項の左側の成分は, 中心電荷 $c=-3/5$ Virasoro 極小モデル $L(-3/5,0)=\mathcal{M}(3,5)$ の表現の指標として現れる. それを用いて,

$$
Z(W,\tau) = Z(V_{E_7},\tau)\cdot Z(L(-3/5,-1/20),\tau) + Z(V_{E_7+\mu},\tau)\cdot Z(L(-3/5,1/5),\tau). \tag{2}
$$

同様にして,

$$
Z(M,\tau) = Z(V_{E_7},\tau)\cdot Z(L(-3/5,3/4),\tau) + Z(V_{E_7+\mu},\tau)\cdot Z(L(-3/5,0),\tau). \tag{3}
$$

ここで, $Z(L(-3/5,l),\tau)$ は, $\mathcal{M}(3,5)$ の, 最高ウェイト l の表現 $L(-3/5,l)$ の指標である ($l=0,3/4,1/5,-1/20$). V_{E_7} と $\mathcal{M}(3,5)$ は, 有理共形場理論なので, その表現の指標はモジュラー不変性を持つ [Z]. S 変換の行列を具体的に書く (cf.[W])

$$
\begin{pmatrix} Z\left(V_{E_7};-1/\tau\right) \\ Z\left(V_{E_7+\mu};-1/\tau\right)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix} Z\left(V_{E_7};\tau\right) \\ Z\left(V_{E_7+\mu};\tau\right)\end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} Z(L(-3/5,0);-1/\tau) \\ Z(L(-3/5,3/4);-1/\tau) \\ Z(L(-3/5,1/5);-1/\tau) \\ Z(L(-3/5,-1/20);-1/\tau)\end{pmatrix}\\
&= \sqrt{\frac{2}{5}}\begin{bmatrix} \sin(2\pi/5) & -\sin(2\pi/5) & -\sin(\pi/5) & \sin(\pi/5) \\ -\sin(2\pi/5) & -\sin(2\pi/5) & \sin(\pi/5) & \sin(\pi/5) \\ -\sin(\pi/5) & \sin(\pi/5) & -\sin(2\pi/5) & \sin(2\pi/5) \\ \sin(\pi/5) & \sin(\pi/5) & \sin(2\pi/5) & \sin(2\pi/5)\end{bmatrix}.\\
&\qquad\qquad\begin{pmatrix} Z(L(-3/5,0);\tau) \\ Z(L(-3/5,3/4);\tau) \\ Z(L(-3/5,1/5);\tau) \\ Z(L(-3/5,-1/20);\tau)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

これより, $Z(W,-1/\tau)$ を計算してみると,

$$
\begin{aligned}
&Z(W,-1/\tau)\\
&=Z(V_{E_7},-1/\tau)\cdot Z(L(-3/5,-1/20),-1/\tau)\\
&\quad +Z(V_{E_7+\mu},-1/\tau)\cdot Z(L(-3/5,1/5),-1/\tau)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(g_1(\tau)+g_2(\tau)\Big)\sqrt{\frac{2}{5}}\Big(\sin(\pi/5)h_1(\tau)+\sin(\pi/5)h_2(\tau)\\
&\quad +\sin(2\pi/5)h_3(\tau)+\sin(2\pi/5)h_4(\tau)\Big)\\
&\quad +\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(g_1(\tau)-g_2(\tau)\Big)\sqrt{\frac{2}{5}}\Big(-\sin(\pi/5)h_1(\tau)+\sin(\pi/5)h_2(\tau)\\
&\quad -\sin(2\pi/5)h_3(\tau)+\sin(2\pi/5)h_4(\tau)\Big)\\
&=\frac{2}{\sqrt{5}}\Big(\sin(2\pi/5)\left(g_1(\tau)h_4(\tau)+g_2(\tau)h_3(\tau)\right)+\sin(\pi/5)\left(g_1(\tau)h_2(\tau)+g_2(\tau)h_1(\tau)\right)\Big)\\
&=\frac{2}{\sqrt{5}}\Big(\sin(2\pi/5)Z(W,\tau)+\sin(\pi/5)Z(M,\tau)\Big).
\end{aligned}
$$

ここで, $g_1(\tau)=Z(V_{E_7},\tau)$, $g_2(\tau)=Z(V_{E_7+\mu},\tau)$, $h_1(\tau)=Z(L(-3/5,0),\tau)$, $h_2(\tau)=Z(L(-3/5,3/4),\tau)$, $h_3(\tau)=Z(L(-3/5,1/5),\tau)$, $h_4(\tau)=Z(L(-3/5,-1/20),\tau)$. 同様にして,

$$Z(M,-1/\tau)=\frac{2}{\sqrt{5}}\Big(\sin(\pi/5)Z(W,\tau)-\sin(2\pi/5)Z(M,\tau)\Big).$$

よって, $Z(W,\tau)$ と $Z(M,\tau)$ の張る線形空間 K が, S 変換の下で不変であることが示された. T 変換の下で K が不変であることも同様に示すことが出来て, 合わせて, K が $SL(2,\mathbb{Z})$-不変であることを得る. [Mil] の結果と, 直接計算により, K は次の微分方程式の解空間となる.

$$f''(\tau)+2E_2(\tau)f'(\tau)-\frac{551}{5}E_4(\tau)f(\tau)=0.$$

こうして, 定理を得る. □

3 今後の展望

指標の等式 (2), (3) の表現論的な意味づけを与えることは興味深い問題だと考えられる. 一方, この等式は, 右辺各項の右側の因子を $\mathcal{M}(3,5)$ の指標だと思うことをやめると, 表現論的な意味づけをすることができる. それは, 整格子とは限らない, 一般の有理格子から出発して主部分空間を考えることで得られる. さらに, それを用いると, 中間頂点代数 W の n 点相関関数のモジュラー不変性も示すことが出来る. そのことについて [Kaw2] で記述する予定である. また, Zhu の理論 [Z] を中間頂点代数に一般化出来るかは重要な問題である. 他の関連する研究について述べる. Deligne の公式に関連する概念として, Vogel の普遍リー環 [V] がある [LM2]. Vogel の普遍性は, Mkrtchyan と Veselov によって

Chern-Simons 理論の分配関数や中心電荷などにも見出されている. また, Deligne の例外系列に関連して, 頂点作用素代数の例外系列や, 共形デザインの概念がある [Mat, H, T].

参考文献

[A] Andrews, G. E.: The theory of partitions. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 2. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam (1976)

[D] Deligne, P.: La série exceptionalle de groupes de Lie, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **322** 321–326 (1996)

[H] Höhn, G.: Conformal designs based on vertex operator algebras, Adv. Math. **217** no. 5, 2301–2335 (2008)

[Kaw] Kawasetsu, K.: The intermediate vertex subalgebras of the lattice vertex operator algebras. Lett. Math. Phys. **104.2** 157–178 (2014)

[Kaw2] Kawasetsu, K., in preparation.

[KNS] Kaneko, M., Nagatomo, K., Sakai, Y.: Modular forms and second order ordinary differential equations: applications to vertex operator algebras. Lett. Math. Phys. **103** 439–453 (2013)

[KZ] Kaneko, M., Zagier, D.: Supersingular j-invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials. AMS/IP Stud. Adv. Math. **7** 97–126 (1998)

[KKMM] Kedem, R., Klassen, T. R., McCoy, B. M., Melzer, E.: Fermionic sum representations for conformal field theory characters, Phys. Lett. B vol. **307** issue 1-2, 68–76 (1993)

[LM1] Landsberg, J. M., Manivel, L.: The sextonions and $E_{7\frac{1}{2}}$, Adv. Math. **201** (1) 143–179 (2006)

[LM2] Landsberg, J. M., Manivel, L.,: A universal dimension formula for complex simple Lie algebras, Adv. Math. **201.2** 379–407 (2006)

[Mat] Matsuo, A.: Norton's trace formulae for the Griess algebra of a vertex operator algebra with larger symmetry, Commun. Math. Phys. **224** 565–591 (2001)

[Mil] Milas, A.: On certain automorphic forms associated to rational vertex operator algebras, Moonshine: the first quarter century and beyond, 330-357, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **372**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2010)

[MilP] Milas, A., Penn, M.: Lattice vertex algebras and combinatorial bases: general case and $\mathcal{W}$-algebras. New York J. Math. **18** 621–650 (2012)

[MMS] Mathur, S., Mukhi, S., Sen, A.: On the classification of rational conformal field theories, Phys. lett. B, Vol. **213**, Issue. 3, 303–308 (1988)

[MV] Mkrtchyan, R. L., and Veselov A. P.: Universality in Chern-Simons theory, J. High Ener. Phys. **153**, 1–12 (2012)

[P] Primc, M.: Vertex operator construction of standard modules for $A_n^{(1)}$, Pacific J. Math. **162** 143–187 (1994)

[SF] Stoyanovskii, A. V., Feigin, B. L., Functional models for representations of current algebras and semi-infinite Schubert cells. Funct. Anal. Appl. **28**, no. 1, 55–72 (1994)

[T] Tuite, M. P.: Exceptional vertex operator algebras and the Virasoro algebra, Contemp. Math. **497** 213–225 (2009)

[V] Vogel, P.: The universal Lie algebra, preprint (1999)

[W] Wakimoto, M.: Lectures on infinite dimensional Lie algebras. World Scientific Publishing, Singapore (2001)

[Z] Zhu, Y.: Modular invariance of characters of vertex operator algebras. J. AMS 237–302 (1996)